

# Методика изучения уравнений и неравенств в курсе алгебры основной школы

Сухие строки уравнений –  
В них сила разума влилась.  
В них объяснение явлений,  
Вещей разгаданная связь.

*Л.М. Фридман*

# План

1. **Значение уравнений и неравенств в школьном курсе математики**
2. **Место уравнений и неравенств в курсе алгебры основной школы**
3. **Основные понятия, термины и преобразования линии уравнений и неравенств**
4. **Различные методические подходы к введению понятия уравнения**
5. **Методика изучения основных видов уравнений и их систем в курсе алгебры основной школы (с/р: Харьковская §8)**
6. **Общие методы решения уравнений и неравенств**
7. **Основные типы учебных задач темы и приемы их решения**
8. **Особенности изучения неравенств**
9. **Характерные затруднения учащихся и пути их преодоления**
10. **Технологическая схема обучения решению уравнений и неравенств**

# История становления теории уравнений и неравенств

≈3000 лет до н.э. – древнеегипетские папирусы

≈2000 лет до н.э. – древневавилонские таблички

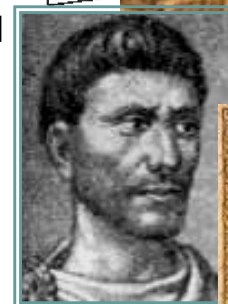
≈3 в. до н.э. – геометрическая алгебра + Диофант

...

IX-XV в. – арабы + Омар Хайям

XVI в. – итальянцы + французы

Становление теории уравнений – трудный и длительный процесс (≈ 46 веков)



# Значение уравнений и неравенств в школьном курсе математики

Понятие уравнения является ведущим алгебраическим понятием. Эта линия развертывается в трех основных направлениях:

- **ПРИКЛАДНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ**
- **ТЕОРЕТИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ**
- **НАПРАВЛЕННОСТЬ НА УСТАНОВЛЕНИЕ СВЯЗЕЙ С ОСТАЛЬНЫМ СОДЕРЖАНИЕМ** курса математики:
  - с числовой линией;
  - с функциональной линией;
  - с линией тождественных преобразований;
  - с алгоритмической линией.

# Место уравнений и неравенств в курсе алгебры основной школы

**I этап** (пропедевтический).

- **1-4 классы:** Элементарные сведения о переменной и уравнении. Основной метод решения – нахождение неизвестного компонента действий  $[2+\square=5]$ . [Интуитивно-практический уровень]
- **5-6 классы:** Определение понятия уравнения как равенства, содержащего неизвестное число/ переменную величину. Решение линейных уравнений. Составление уравнения для решения текстовых задач.

# Место уравнений и неравенств в курсе алгебры основной школы

## III этап (основной).

### • 7 класс:

- вводится четкое определение уравнения;
- теоретически обосновываются свойства уравнений;
- дедуктивное обоснование процесса решения уравнения;
- решение систем уравнений;
- использование графического метода решения.

### • 8 класс:

- вводится определение неравенства;
- теоретически обосновываются свойства неравенств;
- решение систем линейных неравенств с одной переменной;
- квадратные уравнения и неравенства;
- рациональные уравнения и неравенства.

### • 9 класс:

- целое уравнение и его корни;
- решение уравнений 3-й и 4-й степеней;
- уравнение с двумя переменными и его график (для неравенств\*);
- системы уравнений второй степени с двумя неизвестными.

# Место уравнений и неравенств в курсе алгебры основной школы

**III этап** (завершающий).

• **10-11 классы:**

- тригонометрические уравнения;
- простейшие тригонометрические неравенства;
- показательные уравнения, неравенства и их системы;
- логарифмические уравнения, неравенства и их системы;
- иррациональные уравнения, неравенства и их системы.

Для реализации профильной направленности в изучении линии уравнений и неравенств можно рекомендовать следующие элективные курсы:

- «Элементы линейного программирования»;
- «Введение в алгебру и анализ: культурно-исторический дискурс»/ А.Н.Земляков, М., 2007.



# Основные понятия, термины и преобразования линии уравнений

Определение: *Предложение с переменной, имеющее вид равенства между двумя выражениями с этой переменной, называется уравнением.*

## Основные термины:

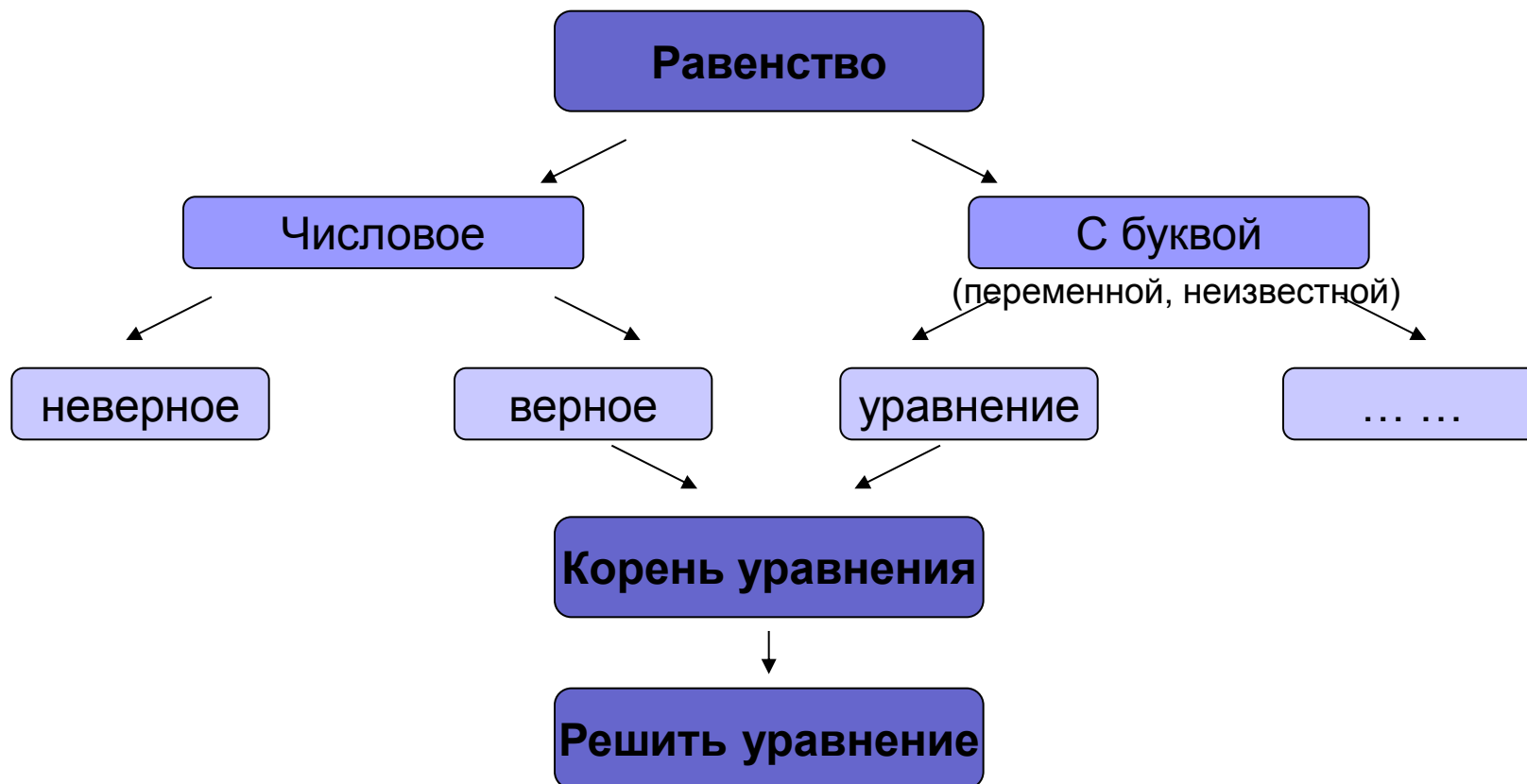
- переменная;
- неизвестное;
- уравнение;
- корень уравнения;
- что значит решить уравнение?
- система уравнений;
- решение системы уравнений;
- равносильность;
- логическое следование и др.

## Основные преобразования:

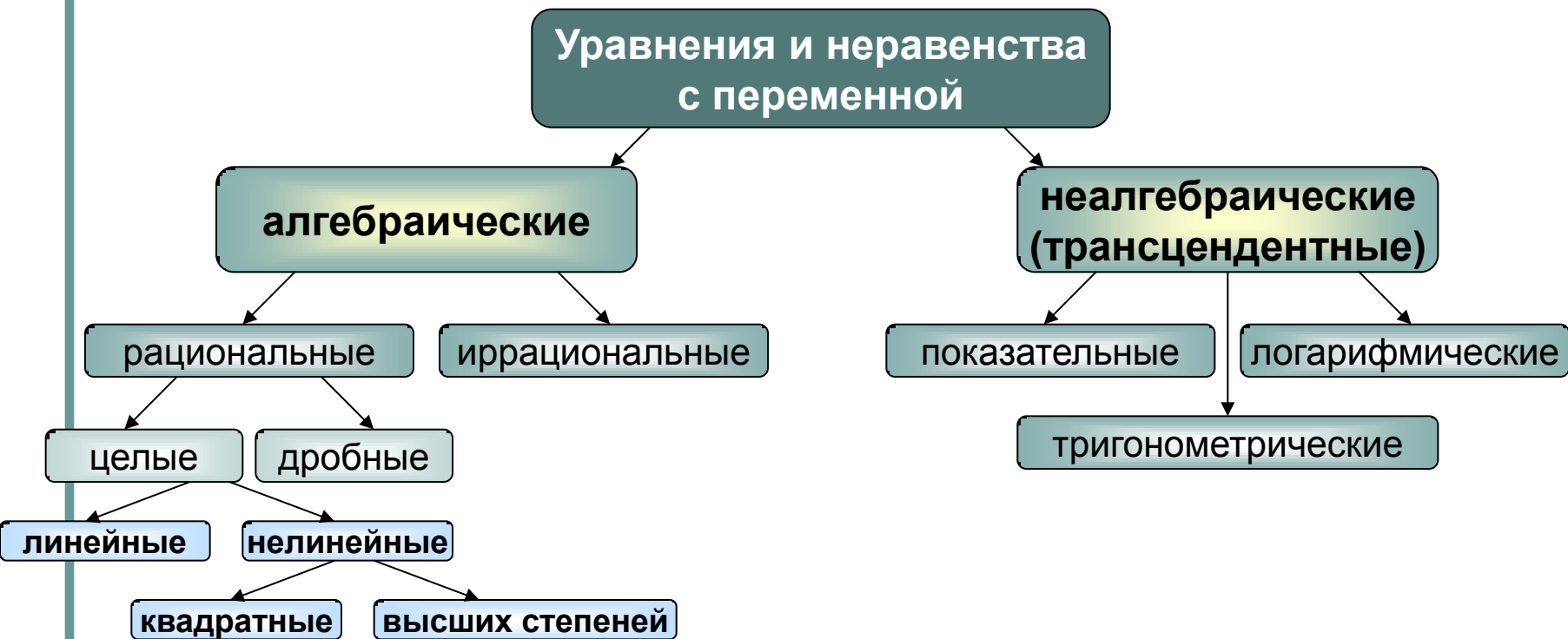
1. Тожественные (скобки, подобные);
2. Согласованные преобразования обеих частей в результате применения арифметических действий (прибавление, умножение);
3. Преобразования, изменяющие логическую структуру:
  - а)  $f(x)g(x)=0 \rightarrow f(x)=0$  или  $g(x)=0$ ;
  - б) почленное сложение, умножение или деление уравнений;
  - в) способ подстановки;
  - г) введение новой переменной.



# СВЯЗЬ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ ЛИНИИ



# Классификация уравнений и неравенств



- Для каждого вида уравнения существует уравнение *стандартного вида* и его подвиды.

# Общие методы решения уравнений и неравенств

## Алгебраический метод (метод равносильных преобразований)

### *Два способа установления равносильности*

1. Убедиться в совпадении множеств корней.
2. Применять преобразования, не нарушающие равносильность.

### *Методика работы по формированию понятия равносильности*

- При помощи частных примеров выясняется, какие преобразования не изменяют корни уравнений;
- Отрабатывается понимание, что для решения уравнений можно пользоваться не только тождественными преобразованиями;
- Выясняется, в результате каких операций получается уравнение, равносильное данному.

# Общие методы решения уравнений и неравенств

## Алгебраический метод (метод равносильных преобразований)

### *Сущность метода:*

1. Последовательный переход с помощью тождественных и равносильных преобразований от данного уравнения к более простым до тех пор, пока не получится одно или несколько простейших данного вида.
2. Решение простейших уравнений по известной формуле или алгоритму.

# Общие методы решения уравнений и неравенств

## Алгебраический метод (метод равносильных преобразований)

### Равносильные преобразования уравнений и неравенств

#### 1. Общие для всех видов:

- перенос слагаемых из одной части в другую;
- деление всех членов уравнения на одно и то же число;
- приведение уравнения к целому виду;
- смена знаков всех членов;
- замена уравнения  $f(x)g(x)=0$  на совокупность  $f(x)=0$  и  $g(x)=0$ ;
- замена переменной.

#### 2. Специальные:

- возведение обеих частей в степень с натуральным показателем;
- извлечение из обеих частей уравнения корня;
- логарифмирование и потенцирование;
- использование основных тригонометрических тождеств.

# Общие методы решения уравнений и неравенств

## Наглядно-графические приемы

### *Графический метод*

Отыскание значений переменной  $x$ , соответствующей равным значениям функции  $f(x)$  и  $g(x)$  с помощью точки пересечения их графиков.

### *Метод интервалов*

- Найти корни уравнения, соответствующего данному неравенству.
- Отметить их на числовой прямой, разбиваемой на интервалы.
- Исследовать значение неравенства на каждом из полученных интервалов.

# Основные типы учебных задач темы и приемы их решения

**Основными типами учебных задач в этой линии являются:**

- «Решить уравнение (неравенство, систему, совокупность)»;
- «Решить текстовую задачу алгебраическим методом».

**Основные приемы решения:**

- алгебраическим методом;
- графическим методом;
- методом интервалов;
- приемы решения частных видов уравнений и неравенств;
- прием поиска решения и др.

# Основные типы учебных задач темы и приемы их решения

## Прием графического решения уравнений и неравенств

1. Если нужно, преобразуйте уравнение к виду  $f(x)=g(x)$ , выбрав  $f(x)$  и  $g(x)$  наиболее простого вида;  $[f(x)>g(x)]$
2. Постройте графики функций  $y=f(x)$  и  $y=g(x)$  в одной и той же системе координат;
3. Найдите абсциссы точек пересечения графиков;  $[$ найдите промежутки оси абсцисс, для которых график  $y=f(x)$  расположен выше графика функции  $y=g(x)$  $]$
4. Запишите ответ.



# Основные типы учебных задач темы и приемы их решения

## Карточка № 9. Решение линейных уравнений

ПРАВИЛО	ОБРАЗЕЦ	ЗАДАНИЯ
<p>Чтобы решить линейное уравнение,</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1) перенеси слагаемые с неизвестным в левую часть уравнения, меняя их знаки;</li><li>2) перенеси слагаемые без неизвестного в правую часть уравнения, меняя их знаки;</li><li>3) приведи в обеих частях подобные члены;</li><li>4) раздели обе части уравнения на коэффициент при <math>x</math> (если он не равен нулю).</li></ol>	<p>Решить уравнение:</p> $2x - 17 = 63 + 4x.$ <p>Решение:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1) <math>2x - 17 - 4x = 63</math>;</li><li>2) <math>2x - 4x = 63 + 17</math>;</li><li>3) <math>-2x = 80</math>;</li><li>4) <math>x = 80 : (-2)</math>, <math>x = -40</math>.</li></ol> <p>Ответ: <math>\{-40\}</math>.</p>	<p>Решить уравнения:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1) <math>4x + 5 = 2x - 7</math>;</li><li>2) <math>5x - 7 = 13</math>;</li><li>3) <math>3(x + 2) = 2(x + 2)</math>;</li><li>4) <math>2x - 4 = 8 + 2x</math>;</li><li>5) <math>4x + 6 = 2(2x + 3)</math>.</li></ol>
		<ol style="list-style-type: none"><li>6) <math>3x + 4 = 7x - 8</math>;</li><li>7) <math>2x - 3 = 10</math>;</li><li>8) <math>2(x + 1) = 3(x + 1)</math>;</li><li>9) <math>3x - 5 = 3 + 3x</math>;</li><li>10) <math>3x + 6 = 3(x + 2)</math>.</li></ol>
		<ol style="list-style-type: none"><li>11) <math>5x + 1 = 3x + 1</math>;</li><li>12) <math>6x - 1 = 11</math>;</li><li>13) <math>x - 1 = 7(x - 1)</math>;</li><li>14) <math>x - 2 = 1 + 4x</math>;</li><li>15) <math>5x + 5 = 5(x - 1)</math>.</li></ol>

# Основные типы учебных задач темы и приемы их решения

Карточка № 10. Решение квадратных уравнений по формуле

ПРАВИЛО	ОБРАЗЦЫ	ЗАДАНИЯ
<p>Чтобы решить по формуле квадратное уравнение <math>ax^2 + bx + c = 0</math>, нужно:</p> <p>вычислить его дискриминант <math>D = b^2 - 4ac</math>;</p> <p>если <math>D &lt; 0</math>, записать ответ: корней нет;</p> <p>если <math>D = 0</math>, вычислить единственный корень уравнения по формуле <math>x = -\frac{b}{2a}</math>;</p> <p>если <math>D &gt; 0</math>, вычислить два корня уравнения по формуле <math>x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}</math>.</p>	<p>Решить уравнения:</p> <p>а) <math>8x^2 + 4x + 3 = 0</math>, б) <math>x^2 - 6x + 9 = 0</math>, в) <math>5x^2 - 3x - 2 = 0</math>.</p> <p><b>Решение:</b></p> <p>а) <math>8x^2 + 4x + 3 = 0</math>; <math>D = 4^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = -80 &lt; 0</math>. <b>Ответ:</b> корней нет.</p> <p>б) <math>x^2 - 6x + 9 = 0</math>; <math>D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0</math>. <math>x = \frac{6}{2} = 3</math>. <b>Ответ:</b> <math>\{3\}</math>.</p> <p>в) <math>5x^2 - 3x - 2 = 0</math>; <math>D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 49 &gt; 0</math>. <math>x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{10} = \frac{3 \pm 7}{10}</math>, <math>x_1 = -0,4</math>, <math>x_2 = 1</math>. <b>Ответ:</b> <math>\{-0,4; 1\}</math>.</p>	<p><b>Решить уравнения:</b></p> <p>1) <math>3x^2 + 5x - 8 = 0</math>; 2) <math>x^2 + 5x + 10 = 0</math>; 3) <math>7x^2 - 14x + 7 = 0</math>; 4) <math>-x^2 + 3x + 4 = 0</math>; 5) <math>4(x-1)^2 - 16x = 0</math>;</p>
		<p>6) <math>5x^2 + x - 6 = 0</math>; 7) <math>3x^2 + 6x + 3 = 0</math>; 8) <math>x^2 + 4x + 5 = 0</math>; 9) <math>4x^2 - 11x - 7 = 0</math>; 10) <math>5(x-2)^2 - 45x = 0</math>;</p>
		<p>11) <math>2x^2 + 7x - 9 = 0</math>; 12) <math>2x^2 - 4x + 2 = 0</math>; 13) <math>x^2 - 10x + 30 = 0</math>; 14) <math>x^2 + 5x + 6 = 0</math>; 15) <math>3(x+1)^2 - 27x = 0</math>.</p>

# Основные типы учебных задач темы и приемы их решения

## **Прием поиска решения уравнения (неравенства, системы)**

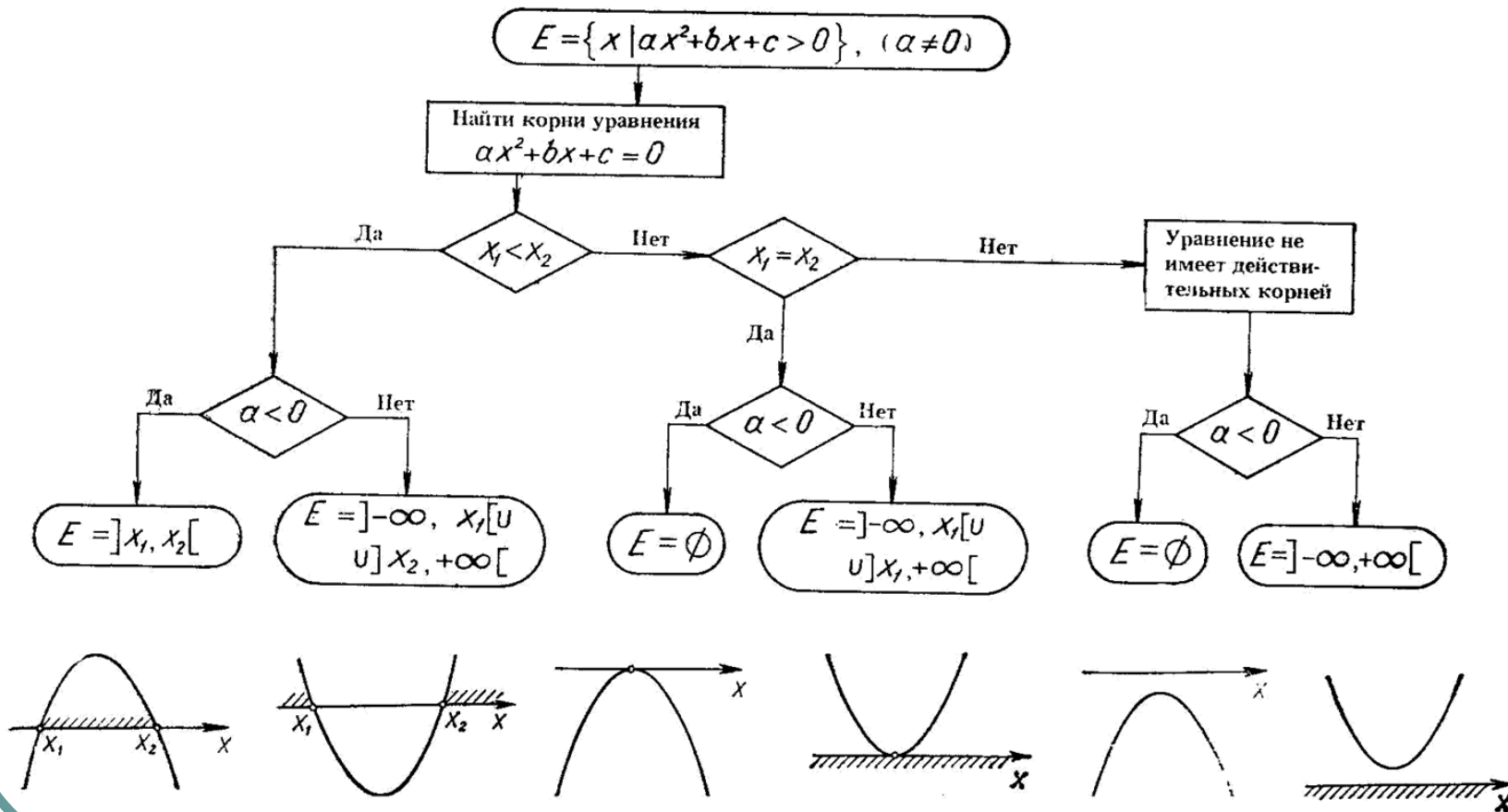
1. Определите, по виду уравнения и прикидкой, каким методом решения можно воспользоваться – алгебраическим, графическим, методом интервалов;
2. Вспомните известный прием использования этого метода и соотнесите его с данным уравнением;
3. Определите возможные затруднения при использовании одного метода решения;
4. Определите необходимость и возможность комбинации различных методов решения;
5. Составьте план решения в целом.

# Особенности изучения неравенств

- 1) Навыки решения неравенств формируются на более низком уровне, чем для уравнений, т.к. теория неравенств объективно сложнее теории уравнений;
- 2) Большинство приемов решения состоит в переходе от неравенства  $f(x) > g(x)$  к уравнению  $f(x) = g(x)$  и в обратном переходе от найденных корней уравнения к множеству решений неравенства. Этот переход превращается в основной метод решения неравенств – метод интервалов.
- 3) Темы, относящиеся к неравенствам, расположены после тем, относящихся к соответствующему классу уравнений.
- 4) Большую роль играют наглядно-графические методы, поэтому изучение неравенств зависит от качества изучения функциональной линии.
- 5) Прикладная направленность изучения неравенств.

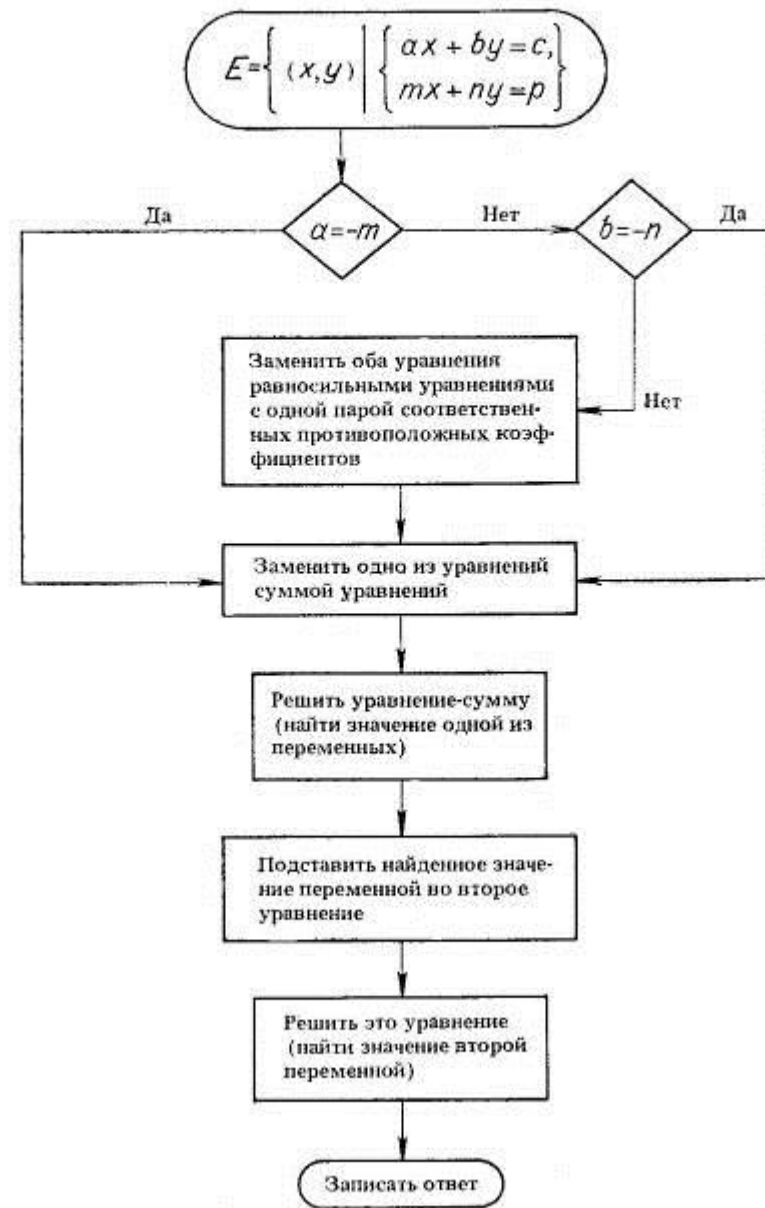
# Специальные методы и приемы обучения

## РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ



# Специальные методы и приемы обучения

## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ СПОСОБОМ СЛОЖЕНИЯ



# Типичные ошибки учащихся при решении уравнений и неравенств

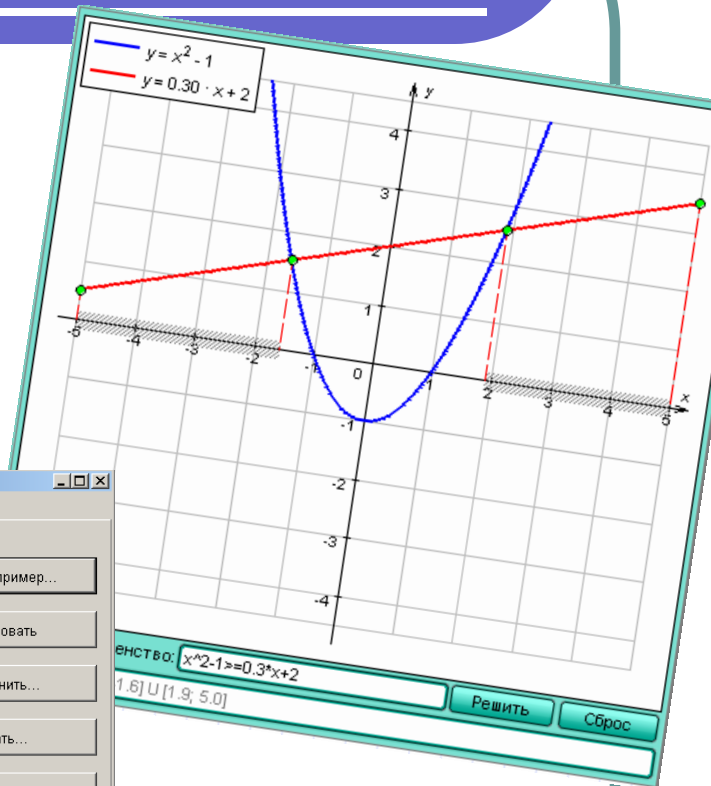
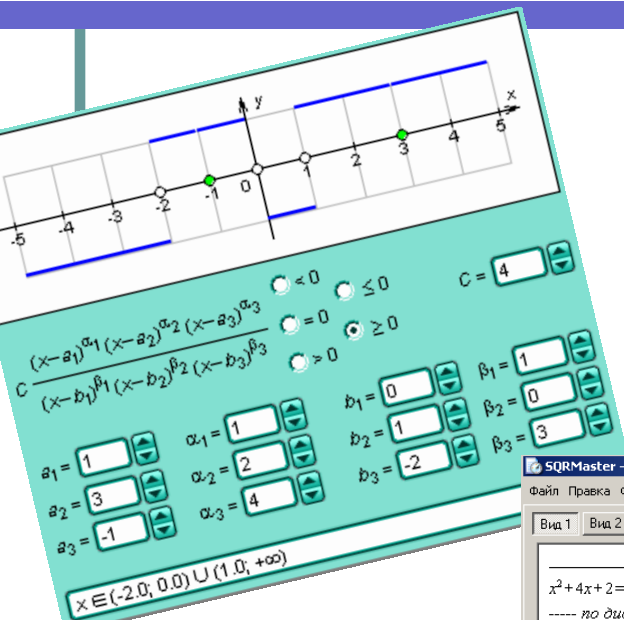
1. Ошибки в тождественных преобразованиях выражений в одной из частей;
2. Неодинаковость и неправомерность действий, выполняемых в левой и правой части ( от  $3x = \frac{\pi}{6} + \pi$  к  $x = \frac{\pi}{2} + 3\pi$  );
3. Упрощение левой и правой частей в отдельности, в результате чего может измениться ОДЗ;
4. Деление/умножение обеих частей на одно и то же выражение;
5. Извлечение квадратного корня из обеих частей с неумением поставить после этого правильный знак;
6. Возведение в квадрат обеих частей, что может привести к расширению ОДЗ;
7. При замене переменной не определяется ОДЗ новой переменной и др.

# Технологическая схема обучения решению уравнений и неравенств

- 1) мотивация введения нового вида уравнения;
- 2) подведение к понятию нового вида уравнения и введение его определения;
- 3) классификация понятия нового вида уравнения, выделение частных случаев простейших уравнений;
- 4) решение простейших уравнений данного вида;
- 5) анализ действий, необходимых для их решения;
- 6) вывод алгоритма (формулы, правила) решения, его наглядное представление и отработка;
- 7) решение несложных уравнений данного вида, не являющихся простейшими;
- 8) анализ действий, необходимых для их решения с применением алгоритма;
- 9) формулировка частного приема решения, его наглядное представление;
- 10) применение полученного частного приема по образцу, в сходных ситуациях;
- 11) решение текстовых задач, приводящих к решению уравнений с помощью полученного частного приема;
- 12) сравнение полученных частных приемов решения;
- 13) применение обобщенного приема решения уравнений в различных ситуациях;
- 14) контроль знаний, умений и навыков учащихся на предмет соответствия требованиям стандарта.



# Возможности использования ЦОР в изучении уравнений и неравенств



SQRMaster - Решение

Файл Правка Формат Опции Справка

Вид 1 Вид 2

$x^2 + 4x + 2 = 0$   
----- по дискриминанту при четном  $b$  -----

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 4 - 2 = 2$$
$$\sqrt{D_1} = \sqrt{2}$$
$$x_1 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{D_1}}{a} = -2 - \sqrt{2}$$
$$x_2 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{D_1}}{a} = -2 + \sqrt{2}$$

----- по дискриминанту (общий случай) -----

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 8 = 8$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{2} = -2 - \sqrt{2}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{2} = -2 + \sqrt{2}$$

Ответ:

$$x_1 = -2 - \sqrt{2}$$
$$x_2 = -2 + \sqrt{2}$$

Buttons: Решить пример..., Копировать, Сохранить..., Печать..., Очистить, Справка, Режим добавления текста, Варианты решения (Наиболее оптимальный, Все возможные), Выход в меню

НЕНСТВО:  $x^2 - 1 \geq 0.3 \cdot x + 2$

1.6] ∪ [1.9; 5.0]

Решить Сброс